数理解析研究所講究録
第823巻1993年47-54

Spaces Whose All Non-empty Clopen Subspaces Are Homeomorphic

横浜国大工　寺田敏司（Toshiji Terada）

1. Introducton. 空間はすべて Tyconoff を仮定する。空間 X の任意の2点 x, y に対して f(x) = y を満たす X 上の同相写像 f が存在するとき、X は homogeneous であるという。また、零次元空間 X の任意の開かつ閉集合が X 全体と同相であるとき、X は h-homogeneous であると呼ばれる。第1可算公理を満たす零次元空間 X が h-homogeneous ならば、X は homogeneous である [2]。h-homogeneous空間の例として、Cantor集合 **C**、有理数全体 **Q**、無理数全体 **P**、Sorgenfrey line、ω の Stone-Čech コンパクト化の剰余 $\beta\omega - \omega$ などがある。

最近 Balcar と Dow は、extremally disconnected なコンパクト無限空間 X に対して力学系 (X, Hom) が minimal である必要十分条件として X が h-homogeneous となることを示した [1]。また、ブール代数 B の任意の零でない要素 a に対して B　a が B 全体と同型であるとき、B は（ブール代数として）homogeneous である

と呼ばれる。零次元空間 X に対して X の開かつ閉集合全体が作るブール代数を Clop(X) と表すとき、X がコンパクトならば、X の h-homogeneous性と Clop(X) の homogeneous性とは同値である。従って、コンパクト h-homogeneous 空間の研究は homogeneous ブール代数の研究に対応している。homogeneous ブール代数についての結果については [3] を参照されたい。ここでは、主にコンパクトでない h-homogeneous 空間について考える。

2. First countable h-homogeneous spaces. この節では、Motorov [4], [5] によって得られた結果を紹介する。

2.1. 補題. 空間 X の点 p と空間 Y の点 q に対して、X 及び Y の開かつ閉集合による列 $\{U_n : n \in \omega\}$ と $\{V_n : n \in \omega\}$ が存在して次の条件を満たすとする。

(a) 各 n に対して U_n と V_n は同相である。

(b) $X - \{p\} = \cup\{U_n : n \in \omega\}$, $Y - \{q\} = \cup\{V_n : n \in \omega\}$

(c) $\{\cup\{U_n : n \geq k\}\ \{p\} : k \in \omega\}$ は p の近傍基底をなし、

$\{\cup\{V_n : n \geq k\}\ \{q\} : k \in \omega\}$ は q の近傍基底をなす。

このとき、$f(p) = q$ を満たす X から Y 上への同相写像が存在する。

上の補題において、条件 (a) だけ満たされているとき、$X - \{p\}$ と $Y - \{q\}$ の間に同相写像が存在することは明きらかである。

2.2. 定理(Motorov). 第1可算公理を満たす零次元空間 X が X と同相な開かつ閉集合からなる π-base を持つならば、X は h-homogeneous である。

2.3. 系(Motorov). 第1可算公理を満たす零次元空間 X が孤立点を稠密に含むならば、可算積 X^{ω} は h-homogeneous 従って homogeneous である。

3. Non-pseudocompact h-homogeneous spaces. 前節の Motorov の結果は、第1可算公理のかわりに non-pseudocompact という条件を与えても成立する。すなわち、

3.1. 定理. Non-pseudocompact 零次元空間 X が X と同相である開かつ閉集合からなる π-base を持つならば、X^{ω} は h-homogeneous である。

3.2. 系. 空間 Y は non-pseudocompact 零次元で孤立点を稠密に含むとする。このとき、任意の κ に対して Y^{κ} は h-homogeneous である。

一般に、h-homogeneous 空間の積について次が成り立つ。

3.3. 定理. h-homogeneous 空間の族 $\{ Y_{\lambda} : \lambda \in \Lambda \}$ の直積を X とする。X が compact または non-pseudocompact ならば X も h-homogeneous である。

4. X^{ω} の homogeneity と open continuous image. 第1可算を満たす任意の零次元空間 X に対して、X^{ω} が homogeneous になるかという未解決問題がある。第1可算公理を満たす h-homogeneous 空間は homogeneous であることを考えると、次の問題が出てくる。

問題. 第1可算公理を満たす任意の零次元空間 X に対して、X^{ω} は h-homogeneous か?

もし、この問題の答えが "yes" ならば、次の命題が成り立つことになる。

命題. 第1可算公理を満たす零次元空間 X の空でない任意の開かつ閉集合は X^{ω} の開連続写像による像となる。

いま、有理数全体の空間 Q と無理数全体の空間 P を考えると有限の n に対しては $(Q \oplus P)^n$ から Q 上への開連続写像は存在しない。

4.1. 定理. 上の命題は真である。

この定理は次の定理から簡単に得られる。

4.2. 定理. 空間 X が次の条件を満たす2つの閉集合 A, B の和として表されるものとする。

(1) $A \cap B$ は1点だけからなる。この点を p で表す。

(2) A において p は開かつ閉集合からなる強い意味で減少する可算近傍基底 $\{ U_i : i \in \omega \}$ をもつ。

このとき、X^{ω} から A 上への開連続写像が存在する。

証明. $U_0 = A$ としてよい。また $F_0 = B$, $F_i = U_{i-1} - U_i$ により X の開かつ閉集合の列を定める。そこで、写像 $f : X^{\omega} \to A$ を

次のようにとる。 X^{ω} の各点 $\langle x_i \rangle$ に対して、

(a) 任意の i に対して $x_i \in F_{i+1}$ のとき $f(\langle x_i \rangle) = p$.

(b) $x_i \in F_{i+1}$ となる i が存在するとき $f(\langle x_i \rangle) = x_k$,

ここで $k = \min\{ i : x_i \in F_{i+1} \}$.

上の定理において可算近傍基底をもつ点の存在は本質的である。

4.3. 定理. 零次元空間 X に対して次は同値である。

(1) X は可算近傍基底をもつ点を含む。

(2) 任意の空間 Y に対して X は $(X \oplus Y)^{\omega}$ の開連続像である。

定理 4.2 において条件を加えると次が得られる。

4.4. 定理. 定理 4.2 の前提条件 (1),(2) に次の条件を加える。

(3) $F_1 = A - U_1$, $F_i = U_{i-1} - U_i$ $(i \geq 2)$ はすべて同相である。

このとき、$A \times X^{\omega}$ は X^{ω} と同相である。

4.5. 系. 空間 X の開かつ閉集合 A が h-homogeneous で可算近傍基底をもつ点を含むならば、$A \times X^{\omega}$ は X^{ω} と同相である。

定理 2.2 の Motorov の結果は、第1可算性の条件を少し弱くし

て、可算近傍基底をもつ点が稠密に存在するとしても成り立つ。このことと上の定理から次が得られる。

4.6. 定理. 零次元空間 X の空でない任意の開集合の中に h-homogeneous な空でない開かつ閉集合と可算近傍基底をもつ点が存在するとき、X^ω は h-homogeneous である。

4.7. 系. 第1可算公理を満たす零次元空間 X の空でない任意の開集合が h-homogeneous である空でない開かつ閉集合を含むならば、X^ω は homogeneous である。

たとえば、$\{ X_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$ が第1可算公理を満たす h-homogeneous 空間の族とすれば、この族の位相和の可算積は homogeneous ある。特に、$(Q \oplus P)^\omega$ が homogenous となることが示せる。

参考文献

[1] B. Balcar and A. Dow, Dynamical systems on compact extremally disconnected spaces, Top. and its Appl. 41 (1991), 41-56.

[2] E.K.van Douwen, A compact space with a measure that knows which sets are homeomorphic, Adv. Math.52 (1984), 1-33.

[3] S.Koppelberg, Handbook of Boolean algebras, vol.1 (1989), North-Holland.

[4] D.B.Motorov, Homogeneity and π-networks, Vest. Moskov Univ. Mat. 44 (6) (1989), 31-34.

[5] ——————, Zero-dimensional and linearly ordered bicompacta: properties of homogeneity type, Russ. Math. Surveys 44 (6) (1989), 190-191.

[6] T.Terada, Spaces whose all nonempty clopen subspaces are homeomorphic, Yokohama Math.J. (to appear)